UNTERSUCHUNG DER TURBULENZ BEIM DURCHSTRÖMEN VON WASSER UND QUECKSILBER DURCH SPIRALFÖRMIG GEWUNDENE KAPILLAREN.

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST UND DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KGL. BAYER. JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT AM 5. OKTOBER 1912

VON

GOTTFRIED LECHNER
AUS STRAUBING.

ACAD. LUDOVIC. BAT. BIBL.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH
1913.

Referent:
Geheimer Hofrat Prof. Dr. W. Wien.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorliegende Arbeit habe ich auf Veranlassung des Herrn Geheimen Hofrates Prof. Dr. W. Wien im physikalischen Institute der Universität Würzburg ausgeführt.

An dieser Stelle möchte ich es nicht unterlassen, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Geheimen Hofrat Dr. W. Wien für die Anregung zu dieser Arbeit und für das stetige Interesse, das er für dieselbe bekundete, meinen ergebensten Dank zum Ausdruck zu bringen.

Nicht minder sei Herrn Universitätsprofessor Dr. Harms für manchen wertvollen Rat an dieser Stelle aufs innigste gedankt.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
Einleitung		7
I. Abschnitt.	Beschreibnng der Apparate und der Versuchsanlage	10
1. Kapitel.	Hochdruckanlage	10
2. Kapitel.	Eigentliche Versuchsanordnung	11
3. Kapitel.	Gang der Untersuchung	12
4. Kapitel.	Allgemeines	16
II. Abschnitt.	Vorversuche	17
III. Abschnitt.	Hauptversuche	24
IV. Abschnitt.	Versuche mit Quecksilber	32
V. Abschnitt.	Zusammenfassung der Resultate	35

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549803_0117

Einleitung.

Das von Poiseuille für den Durchfluß von Flüssigkeiten durch gerade Kapillaren aufgestellte Gesetz lautet bekanntlich:

$$V = \frac{\pi}{8\,\eta\,l}\, r^4 . \tau\,(p_a - p_e). \tag{1}$$

Für die Geschwindigkeit, die in einer Entfernung ϱ von der Kapillarenachse vorhanden ist, gilt ferner:

$$u = \frac{p}{4\,\eta\,l}\,(r^2 - \varrho^2). \tag{2}$$

In diesen Formeln bedeuten:

V das durch das Ende ausgetretene Flüssigkeitsvolumen,
r den Radius der Röhre,
l die Länge „ „
p_a den Druck am Anfang der Röhre,
p_e „ „ „ Ende „ „
τ die Ausströmungszeit,
η „ Reibungskonstante.

Alle vorkommenden Größen sind im C.G.S.-System gemessen.

Die strenge Gültigkeit des Gesetzes setzt voraus, daß ein Strömungszustand vorhanden ist, bei dem die Stromlinien parallel zur Achse der Kapillare sind, eine Forderung, die um so genauer erreicht wird, je kleiner die Geschwindigkeiten sind, welche die Flüssigkeit beim Durchströmen besitzt. Es macht sich in diesem Falle der Einfluß der Enden der Röhre wenig bemerkbar. Letzterer[1]) nämlich besteht darin, daß an den

1) E. Grüneisen, Wissenschaftliche Abhandlungen der Phys.-Techn. Reichsanstalt, 4, Heft 2, p. 179.

Kapillarenenden eine Abweichung von der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung auftritt, wie sie im Innern an jeder Stelle des Querschnitts vorhanden ist. Bei zunehmender Geschwindigkeit zieht sich nun diese annormale Geschwindigkeitsverteilung allmählich immer weiter in das Innere der Röhre hinein und bringt so Abweichungen vom Poiseuilleschen Gesetz hervor. Bei weiterer Erhöhung der Geschwindigkeit fand nun Osborne Reynolds, daß der dem obigen Gesetze entsprechende Strömungszustand aufhört stabil zu sein, indem nämlich von einer bestimmten Geschwindigkeit an, die er „kritische Geschwindigkeit" nennt, wirbelförmige Bewegungen der Flüssigkeitsteilchen zutage treten. Reynolds hat dieses Auftreten von Wirbeln theoretisch[1]) sowohl als experimentell[2]) untersucht und fand als Ausdruck für diese Grenzgeschwindigkeit beim Übergang zum Turbulenzzustand:

$$(3) \qquad \varkappa = \frac{\varrho \cdot d\, U_m}{\eta}.$$

Hierin bedeuten:

- $\varkappa$ eine numerische Konstante, deren Wert für kreisförmige Querschnitte zwischen 1900 und 2000 schwankt,
- U_m die mittlere Geschwindigkeit,
- η „ Reibungskonstante,
- ϱ „ Dichte,
- d den Durchmesser der Kapillare.

Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich aus Formel (2) wenn man das Mittel nimmt aus der zu $\varrho = o$ und $\varrho = r$ gehörigen Geschwindigkeiten, d. h. sie ist gleich der halben in der Richtung der Achse vorhandenen Geschwindigkeit; man findet also für ihren Wert:

$$(4) \qquad U_m = \frac{p\, r^2}{8\, \eta\, l} = \frac{V}{q \cdot \tau}.$$

1) O. Reynolds, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. London. Phil. Trans. (A 186). 1895.

2) O. Reynolds, An experimental investigation of the circumstance, which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. London. Phil. Trans. 174. 1883.

Für den kritischen Druck erhält man dann:

$$(5) \qquad P = \frac{8\,\eta\,l\,.\,U_m}{r^2} = \frac{32\,\eta^2 l\,.\,K}{\varrho\,.\,d^3}.$$

Es war nun von Interesse die experimentellen Untersuchungen über das Auftreten dieses Turbulenzzustandes auf Kapillaren auszudehnen, die von der geradlinigen Form abweichen. Was nun das Poiseuillesche Gesetz im Falle von gebogenen Kapillaren betrifft, so haben schon früher verschiedene Autoren [1]) darauf hingewiesen, daß bereits bei niedrigen Drucken wesentliche Abweichungen eintreten. In welcher Weise aber bei gekrümmten Kapillaren das Reynoldssche Kriterium beeinflußt wird, darüber sind meines Wissens noch keine aufschlußgebenden Versuche unternommen worden. Die der Poiseuilleschen Bewegung entsprechende Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen ist bei geraden Röhren eine strenge, bei der keine Vernachlässigungen gemacht sind. Sie ist hier also immer eine mögliche Bewegung auch bei beliebig hohen Geschwindigkeiten. Bei gewundenen Röhren ist die Lösung nur so lange richtig, als die Zentrifugalkraft der Bewegung vernachlässigt werden darf. Hier ist also die Poiseuillesche Bewegung nur bei kleinen Geschwindigkeiten möglich. Es entsteht nun die Frage, ob hier die turbulente Bewegung früher einsetzt als bei geraden Röhren und ferner, ob die Turbulenz bei großen Geschwindigkeiten mit der Turbulenz in geraden Röhren übereinstimmt.

Ich habe daher von Herrn W. Wien die Aufgabe gestellt bekommen zu untersuchen, welchen Einfluß die Krümmung von engen langen Kapillaren auf das Eintreten des Turbulenzzustandes hat. Zu diesem Zwecke habe ich spiralförmig gewundene Kapillaren verwendet und folgende Fragen zu beantworten gesucht:

Wie ändert sich das Reynoldssche Kriterium:

a) Bei Vermehrung der Windungen?
b) Bei Änderung des Kapillarenradius?

Zur Beantwortung dieser Fragen habe ich die Versuche mit Wasser und Quecksilber durchgeführt.

---

1) Gotthilf Haffner, Erlanger Dissertation p. 16. 1903; H. Egger, Ann. d. Phys. 27. p. 835. 1908.

Erster Abschnitt.

Beschreibung der Apparate und der Versuchsanlage.

Erstes Kapitel: Hochdruckanlage.

Bei den in vorliegender Arbeit ausgeführten Versuchen wurde zum größten Teile die im physikalischen Institute vorhandene Hochdruckanlage[1]) benützt, indem letztere so erweitert wurde, daß auch Messungen mit Drucken von einigen Zentimetern Quecksilberhöhe ausgeführt werden konnte. Die ganze Druckanlage sei an der Hand der Fig. 1 im folgenden kurz skizziert.

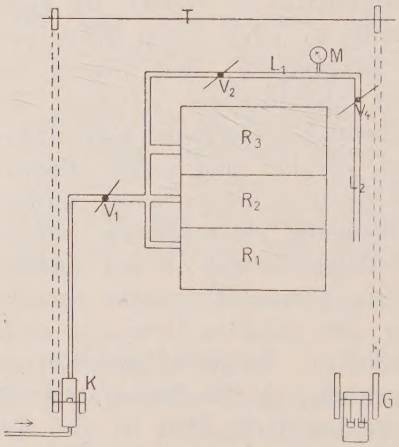


Fig. 1.

Mit Hilfe eines Stufenkompressors K, der durch einen Gasmotor G vermittelst der Transmission T in Betrieb gesetzt wurde, konnte Luft aus dem Freien in die drei übereinanderliegenden Reservoire R_1, R_2, R_3, gepumpt worden. Das Ventil V_1 schloß die drei Lufträume gegen den Kompressor ab, wenn die Luft auf den Maximaldruck von 200 Atmosphären gebracht war. Dieser Druck konnte an dem Metallmanometer M abgelesen werden. Zwischen dem Leitungsrohr L_1 und dem Verbindungsrohr der drei Reservoire war ein weiteres Ventil V_2 angebracht; ebenso waren L_1 und L_2 durch ein Ventil V_4 voneinander getrennt. Der Zweck dieser beiden letzten Ventile wird dann bei der Beschreibung der eigentlichen Versuchsanordnung näher erläutert werden.

Zweites Kapitel: Eigentliche Versuchsanordnung.[2])

Die eigentliche Versuchsanordnung war durch das Leitungsrohr L_2 mit der Hochdruckanlage in Verbindung gesetzt.

1) Wilhelm Ruckes, Würzburger Dissertation p. 12, 13. 1908.

2) Es sei hier erwähnt, daß die oben beschriebene Anordnung zum

S. Fig. 2. Es führte nämlich L_2 zu den beiden Eisenbomben B_1 und B_2. In diese waren luftdicht die Metallröhrchen r_1, r_2, r_3 eingelötet, deren Durchmesser im Verhältnis zu dem der Eisenbomben sehr klein war. Das Röhrchen r_3, mündete in die

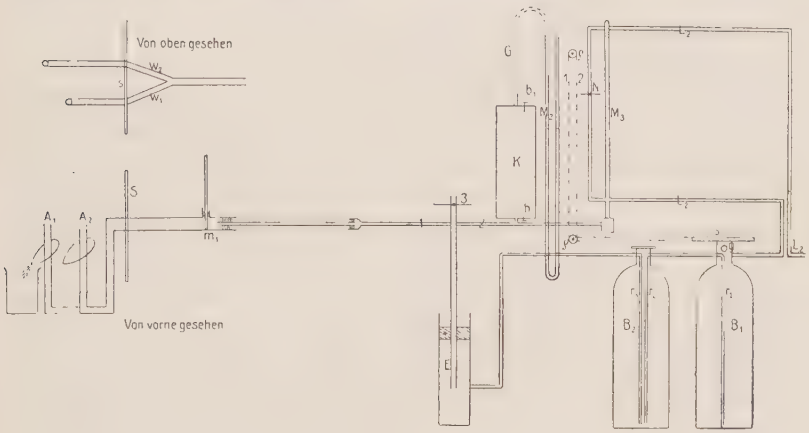


Fig. 2.

Eisenflasche E. In letztere war ein T-förmiges Metallrohr eingeschraubt. Der eine Arm 1 diente zum Anbringen der zu untersuchenden Kapillaren, während der andere zu den Manometern führte, mit denen der Druck des durch die Kapillaren strömenden Wassers gemessen werden konnte. Arm 3, der während der Messungen geschlossen blieb, diente als Zuleitung zur Füllung der Bomben mit Wasser. Bei allen vorkommenden Verbindungsstellen mußte besonders darauf geachtet werden, daß sie für Luft sowohl als wie für Wasser möglichst dicht seien. Das zweite Ende der Kapillare war in ein weites Rohr m_1 gekittet, in das ein Quecksilberthermometer eintauchte, um die Temperatur des durchströmenden Wassers messen zu können. m_1 verzweigte sich mit Hilfe eines gabelförmigen Glasrohres in die Leitungen W_1 und W_2, welche durch einen Schnapphahn S zu den Ausflußgefäßen führten. Die Einrichtung des Schnapphahns werde ich im nächsten Kapitel beschreiben.

Teil von E. Schnetzler herrührte, wie er sie in seiner in den Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. p. 817. 1910 veröffentlichten Arbeit benutzte.

Drittes Kapitel: Gang der Untersuchung.

Bei allen Versuchen wurde destilliertes Wasser verwendet, das in die Bomben B_1 und B_2 gebracht wurde, und zwar geschah die Füllung in der Weise, daß durch den Arm 3 aus einem etwa 3 Meter über der Ausflußöffnung der Kapillare sich befindlichen Glasballon von 75 Liter Inhalt das Wasser infolge des Überdruckes zunächst in die Eisenflasche E und dann durch die Röhrchen r_1, r_2, r_3 in die Bomben strömte. Um einerseits das Füllen rascher vor sich gehen zu lassen, andererseits um die im Wasser etwa vorhandenen Luftblasen zu entfernen, konnte an die Öffnung g, welche mit einem kurzen Ansatzrohr versehen war und das Innere von B_1 mit der äußeren Atmosphäre verband, gepumpt werden. Nachdem die Bomben gefüllt waren, was man aus dem Ausströmen des Wassers aus der Öffnung g ersehen konnte, wurde Rohr 3 und g geschlossen. Mit Hilfe des oben erwähnten Ventils V_1 konnte aus den Reservoiren beliebig viel komprimierte Luft entnommen werden und der jeweilige Druck am Manometer M abgelesen werden. Um nun von dieser Druckluft zur Erzeugung von niedrigen Drucken kleinere Volumina verwenden zu können, diente das Ventil V_4 (s. Fig. 1), das mit einer Hebelübertragung versehen war und beliebig kleine Volumina in die Leitung L_2 und dann in die Bomben gelangen ließ. Infolge des Druckes, den die Luft auf das Wasser in der Bombe B_1 ausübte, wurde dieses durch die Röhrchen r_1, r_2, r_3 in die Eisenflasche E und in die Kapillaren getrieben. Durch den Arm 2 floß es zu den Manometern M_2 und M_3, welche ebenso wie die Kapillaren beim Füllen der Bomben entfernt wurden. M_2 war ein offenes Hg-Manometer. An den Arm 2 war ein Windkessel K angeschraubt. Durch den Gummischlauch G war er mit einem Schenkel von M_3 verbunden. Durch das in den Windkessel einströmende Wasser wurde die Luft in ihm komprimiert und der Druck an M_2 abgelesen. Vor den Messungen wurden die Schräubchen b_1 und b_2 an K entfernt, um in K den äußeren Luftdruck herzustellen. Mit M_2 konnten Drucke bis zu 3 Atmosphären gemessen werden. Bis zu Drucken von 30 Atmosphären diente dann das geschlossene Wassermanometer M_3, welches folgendermaßen eingerichtet war. Einem möglichst widerstandsfähigen, oben ge-

schlossenen Glasrohr, von der Länge $l = 240$ cm und dem inneren Durchmesser $d = 2{,}5$ cm war eine aus Fig. 3 zu ersehende Form gegeben worden. Mit Hilfe von Siegellack war es in ein Messingzylinderchen m eingekittet. Durch a konnte Wasser hereinströmen. In das Manometerrohr reichte bis zu einer bestimmten Stelle ein Messingröhrchen d von 2 mm Durchmesser. Durch Anbringen der Schraube f wurde m geschlossen. An der Hinterseite des Glasrohres war ein Papiermaßstab angeklebt, dessen Nullpunkt genau mit dem Ende von d in einer horizontalen Ebene lag. Das Volumen des Manometerrohres vom Nullpunkt bis zu einem beliebigen Skalenteil des Maßstabes war durch Auswägen mit Quecksilber bestimmt worden. Bei den Messungen wurde nun so verfahren, daß bei Beginn derselben die Schraube f entfernt und das Wasser genau auf den Nullpunkt der Teilung eingestellt wurde, was leicht zu erreichen war, da das überflüssige Wasser durch d abfließen konnte. Gleichzeitig hatte das Röhrchen d den Zweck im Manometer den äußeren Luftdruck herzustellen, so daß, wenn durch die Schraube f die Verbindung mit der äußeren Luft abgesperrt war, dem Gesamtvolumen vom Nullpunkt an der äußere Luftdruck entsprach. Man konnte also $p\,v = \text{const.}$ berechnen. Da das zu einem Skalenteil des Maßstabes gehörige Volumen bekannt war, so ließ sich aus vorausgehender Gleichung der zugehörige Druck sofort berechnen. Praktisch wurde diese Druckbestimmung durchgeführt, indem an mehreren Stellen, hauptsächlich an den Verengungsstellen, der zu einem Teilstrich gehörige Druck mit Hilfe obiger Beziehung bestimmt und dann Druck und Skalenteil als Ordinaten und Abszissen aufgetragen wurde. Für einen beliebigen Skalenteil wurde der Druck aus der so erhaltenen Kurve entnommen. Falls zu viel Luft in die Bomben eingeströmt war, so wurde durch Drehen der Kreisscheibe s, das Ventil g (s. Fig. 2) geöffnet und dadurch ein Teil der Luft zum Entweichen gebracht. Zur rascheren Handhabung wurde um die Kreisscheibe ein Riemen

Fig. 3.

gelegt und mit Hilfe der Räderchen ϱ der Riemenleitung eine aus Fig. 2 zu ersehende Form gegeben. Durch Anziehen an den Schnüren 1 und 2 konnte g geöffnet und geschlossen werden.

Da nämlich infolge des Ausströmens des Wassers aus den Bomben die über ihm lagernde Luftmenge sich auf einen größeren Raum ausbreitete, so blieb der Druck nicht konstant und bei Drucken von 100 cm Hg betrug der Unterschied zwischen Anfangs- und Enddruck bereits mehr als 30 cm. Durch Regulieren des Ventils V_4 konnte man zwar Luft in die Bomben nachströmen lassen, aber zu exakteren Korrektionen war dieses Verfahren ungenügend. Ich habe daher zwischen L_2 und den Bomben ein sehr feines Nadelventil N eingeschaltet. Die Druckschwankungen wurden dann derart ausgeglichen, daß Ventil V_4 während der Messungen passend geöffnet blieb, so daß ein verhältnismäßig feiner Luftstrom zu N gelangen konnte. Durch Regulieren von N gelang es mir dann, die Drucke bei beiden Manometern bis auf 1 mm konstant zu erhalten. Es möge an dieser Stelle der Zweck der beiden Eisenbomben B_1 und B_2 erwähnt werden: „Das[1]) unter hohen Druck stehende Wasser absorbierte so viel Luft, daß es für die Untersuchungen nicht zu gebrauchen war. Es wurden deshalb zwei Kohlensäurebomben hintereinander geschaltet und durch die engen Verbindungsröhrchen verhindert, daß die absorbierte Luft in die zweite Flasche diffundierte."

Was die Beobachtung des ausgetretenen Flüssigkeitsvolumen betrifft sowie der dazu notwendigen Zeit, so möchte ich mit einer Erklärung dieser Beobachtungsmethoden die Beschreibung des im letzten Kapitel erwähnten Schnapphahns verbinden.

Zwischen zwei festen Messingplatten m_1 und m_2 (s. Fig. 4) von der Dicke $d = 4$ mm konnte ein weiterer Messingstreifen m_3 (Länge: 20 cm, Breite: 4 cm, Dicke: 2,5 mm) durch Einfetten mit Talg sich mit sehr geringer Reibung bewegen. m_1 und m_2 waren mit zwei kreisförmigen, 3 cm voneinander entfernten Ausschnitten vom Durchmesser $d = 2$ cm versehen. Letztere lagen genau einander gegenüber. Die Ausschnitte von m_1 waren mit

1) E. Schnetzler, Verhandlungen der Deutsch. Physik. Gesellschaft, Berlin 1910. p. 817.

der gabelförmig verzweigten Zuleitung verbunden, die von m_2 mit den beiden Ausflußleitungen. Der bewegliche Streifen m_3 besaß ebenfalls zwei kreisförmige Ausschnitte von der gleichen

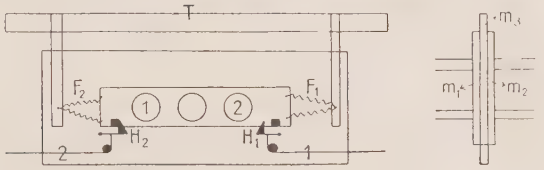


Fig. 4.

Größe. Die Stellung von m_3 war stets eine solche, daß zwei gegenüberliegende Ausschnitte von m_1 und m_2 durch den gleichgroßen von m_3 verbunden waren, während die beiden anderen durch den Streifen zwischen den Ausschnitten von m_3 getrennt waren. Es konnte also stets durch eine Leitung Wasser ausströmen. Nehmen wir an, in 1 sei die Verbindung hergestellt. Durch Verschieben von T nach rechts wurden die Federn F_1 gespannt, durch Ziehen an der Schnur 2 wurde der Hebel H_2 gelöst, m_3 gab dann der gespannten Feder F_1 nach, unterbrach die Öffnung bei 1 und stellte die Verbindung durch 2 her, so daß also jetzt durch 2 Wasser hindurchströmen konnte. Gleichzeitig wurde durch Ziehen an der Schnur 2 eine Stoppuhr in Tätigkeit gesetzt. Durch Verschieben von T nach links wurden jetzt die Federn F_2 gespannt, durch Ziehen an der Schnur 1 der Hebel H_1 gelöst. m_3 gab der gespannten Feder nach, unterbrach jetzt wieder die Öffnung 2 und stellte die durch 1 her. Gleichzeitig wurde durch Anziehen an 1 die Stoppuhr zum Stillstand gebracht. Man konnte so genau die Zeit feststellen, während welcher das Wasser durch eine Öffnung strömte. Vor den Messungen wurde das Wasser abwechselnd durch beide Leitungen geschickt, bis es aus den Ausflußgefäßen A_1 und A_2 ausströmte. Letztere umschlossen dicht anliegend schnabelförmige aus Aluminium gefertigte Schalen, aus denen es dann in die Auffangegefäße strömte. Diese[1]) Schnapphahneinrichtung funktionierte sehr gut. In dem Augenblick, in welchem die Ausströmung durch A_1 unterbrochen

1) E. Schnetzler, Verhandlungen der Deutschen, Physik. Gesellschaft, Berlin p. 817. 1910.

wurde, trat die durch A_2 ein. Das aus den Schalen kommende Wasser wurde bei kleinen Volumina in gewöhnlichen bis 100 ccm reichenden Glasmensuren aufgefangen. Bei größeren Volumina wurde folgende Methode angewendet (s. Fig. 5). Dem Schwimmer S wurde durch ein gleichgroßes Gewicht G das Gleichgewicht gehalten. An G befand sich eine feine Spitze, die vor einem kleinen Maßstab m sich bewegen konnte. Das zu einigen Skalenteilen gehörige Volumen war gemessen und Volumen und Teilstrich graphisch dargestellt worden. Aus der so erhaltenen Kurve konnte nun das zu einem Teilstrich gehörige Volumen entnommen werden.

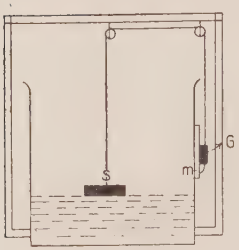


Fig. 5.

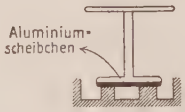


Fig. 6.

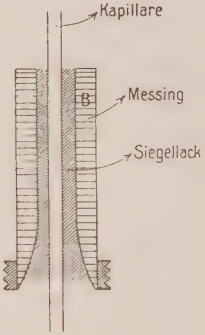


Fig. 7.

Viertes Kapitel: Allgemeines.

Bei den einzelnen Messungen war in erster Linie darauf zu sehen, daß die Ventile und Kittstellen der Kapillaren möglichst dicht waren. Die Ventile hatten eine aus Fig. 6 zu ersehende Form.[1]) Diese Dichtungen geschahen durch Aluminiumscheibchen, die sich im Verlauf der Messungen als sehr haltbar und dicht bewiesen. Die Glaskapillaren, welche an beiden Enden glatt abgeschnitten waren, wurden mit Siegellack in eine Messingbüchse B eingekittet (s. Fig. 7). Diese[2]) Art der Kittung hat sich auch bei hohen Drucken bewährt, so daß nicht ein einziges Mal eine Kapillare herausgeschleudert wurde. B war an den Arm 2 angeschraubt (s. Fig. 2). Die

[1]) Siehe Wilhelm Ruckes, Würzburger Dissertation p. 15 u. 16.
[2]) Ebenda p. 16.

Kapillaren selbst waren während der Messungen in ein Temperaturbad eingetaucht. Ich habe auch Messungen vorgenommen ohne ein Bad zu benutzen und dabei gefunden, daß nicht die geringste Änderung in bezug auf die Temperatur des durchgeströmten Wassers eintrat. Ich konnte daher, ohne einen Fehler zu begehen, das Temperaturbad weglassen, namentlich bei kompliziert gewundenen Röhren. Weitere Sorgfalt war auf die in den Leitungen auftretenden Luftblasen zu verwenden. Indem ich am Anfang der Messungen Wasser unter hohem Druck durchströmen ließ, gelang es mir, die Luftblasen in der Kapillare und den anschließenden Leitungen zu entfernen. Was die Bestimmung der Durchmesser betrifft, so habe ich sie teils mikroskopisch, teils durch Auswägen, teils aber auch durch Durchströmungsversuche nach dem Poiseuilleschen Gesetze bestimmt. Die Längen wurden bei geraden Kapillaren mit einem Bandmaß gemessen, bei gewundenen habe ich einen sehr feinen Faden mit Klebwachs an den einzelnen Windungen befestigt und nachträglich dessen Länge bestimmt. Die Bestimmung des Krümmungshalbmessers geschah in der Weise, daß an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten einer Windung ein dünner Faden befestigt wurde, dessen Länge mit einem Maßstab gemessen wurde. Die gewundenen Kapillaren bezog ich von C. Kramer in Freiburg; sie hatten folgende Form . Die Entfernung zwischen zwei Windungen betrug hier im Mittel ungefähr 1 cm.

Zweiter Abschnitt.

Vorversuche.

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Versuche geschahen in der Weise, daß ich das ausgetretene Flüssigkeitsvolumen sowie den zugehörigen Druck bestimmte und dann graphisch darstellte. Das dem Reynoldsschen Kriterium entsprechende Volumen, bzw. den Druck, erhielt ich als scharfen Knick in der geradlinig ansteigenden Druckvolumenkurve. Dabei nahm ich zuerst eine gerade Kapillare, deren Dimensionen nach obigen Angaben genau bestimmt waren. Hierauf ließ ich die Röhre mit Windungen versehen und bestimmte wieder Druck- und Volumenkurve. Die so erhaltenen

Kurven konnten nun miteinander verglichen werden. Da im voraus über die Größe einer Abweichung bzw. einer Verschiebung des Knickes nichts Positives vorherzusagen war, so war es vorteilhaft, eine Kapillare mit möglichst vielen Windungen und verhältnismäßig kleinem Krümmungshalbmesser zu nehmen. Auf diese Weise habe ich folgende sechs Kapillaren gemessen. Ihre Größenverhältnisse, sowie Windungszahl und Krümmungshalbmesser sind in nachfolgender Tabelle angegeben.

Tabelle 1.

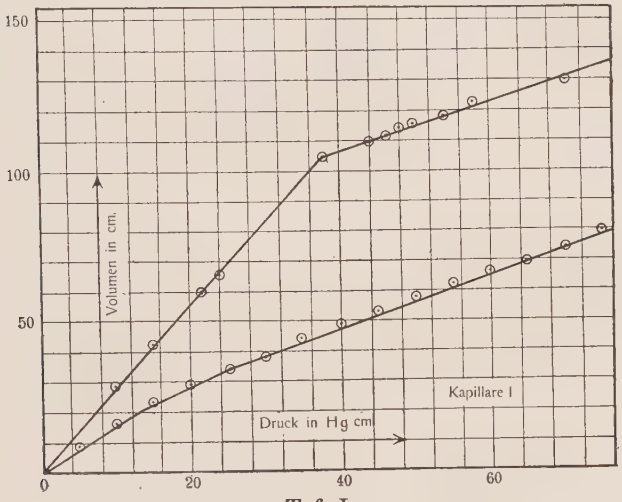
Kapillare	Durchmesser in cm	Länge in cm	Krümmung in cm	Wind.-Zahl
II	0,106	157,6	2,5	14
III	0,111	157,6	2,5	14
I	0,103	157,5	2,5	14
IV	0,112	157,7	7,5	5
V	0,116	157,7	7,5	5
VI	0,111	157,4	7,5	5

Die Kurventafeln I—VI zeigen die erhaltenen Druckvolumenkurven. Als Abszisse ist immer der halbe Druck aufgetragen, als Ordinate das zugehörige Volumen. Das Druckintervall er-

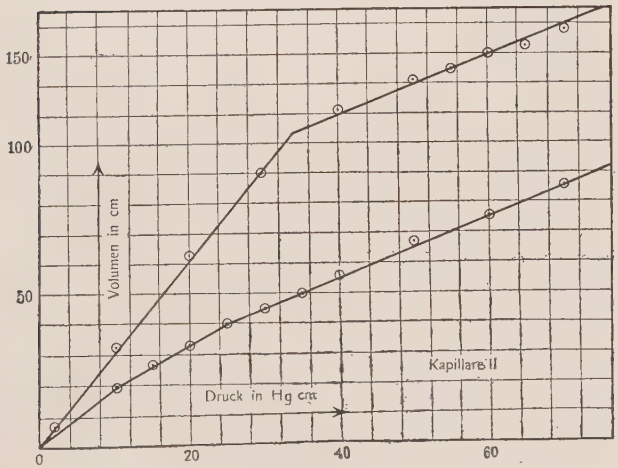
Tabelle 2.

Gerade		Gebogen		Ausströmungszeit in Sek.
Druck in ccm	Volumen in ccm	Druck in ccm	Volumen in ccm	
10	30,9	10	19,4	60
20	61,9	5	11,0	„
30	92,0	15,0	27,6	„
40	111,2	20	33,2	„
—	—	25	40,6	„
50	121,0	30	45,1	„
60	130,0	35	53,0	„
70	138,0	40	57,0	„
—	—	50	67,0	„
—	—	60	76,8	„
—	—	70	86,1	„

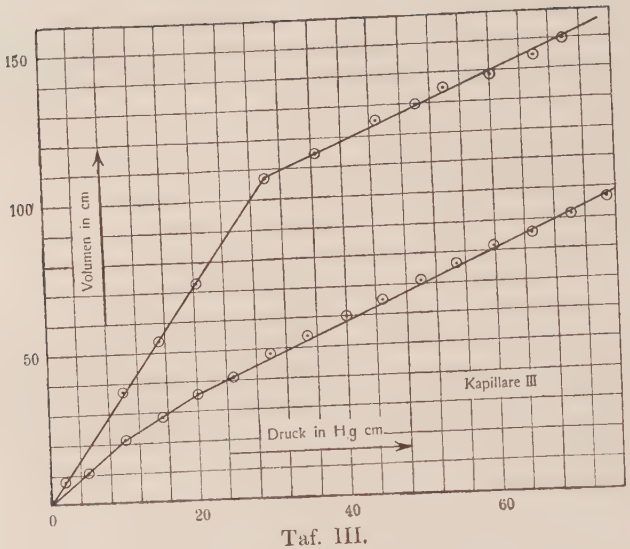
streckte sich hierbei, da sämtliche kritische Drucke bei mittleren Werten liegen, von 2 cm bis $2^1/_2$ Atmosphären. In der Tab. 2 sei als Beispiel der Beobachtungen die einzelnen Werte für die gerade als für die gewundene Form der Röhre 2 wiedergegeben.



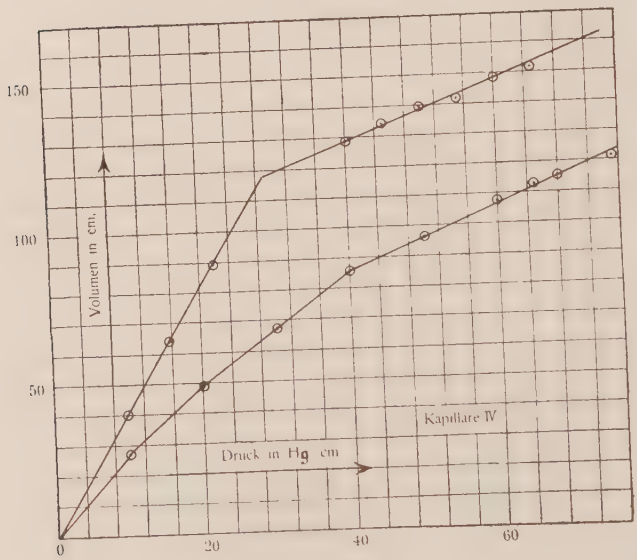
Taf. I.



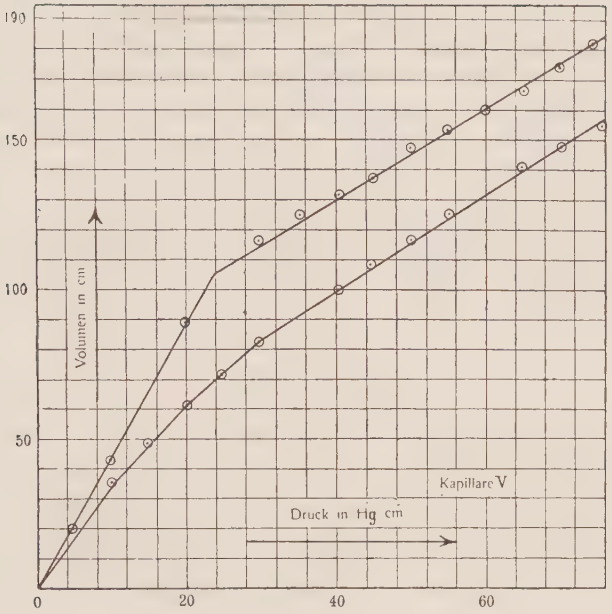
Taf. II.



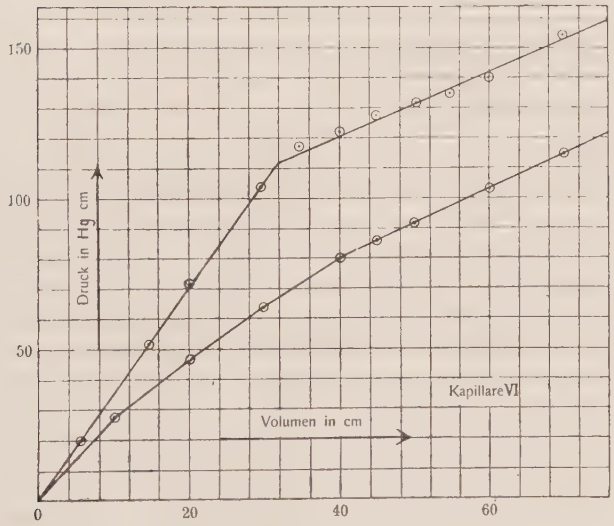
Taf. III.



Taf. IV.


190
150
100
50
0
20
40
60
Volumen in cm
Druck in Hg cm
Kapillare V

Taf. V.


150
100
50
0
20
40
60
Druck in Hg cm
Volumen in cm
Kapillare VI

Taf. VI.

Bevor ich auf eine nähere Diskussion der Abweichungen eingehe, welche schon bei ganz niedrigen Quecksilberdrucken auftreten, scheint es mir vorteilhaft zu sein, das Druckintervall sowohl aufwärts zu höheren Drucken, als abwärts zu niedrigen zu erweitern. Zu diesen Messungen verwendete ich die Kapillare 2. Ich ging zunächst bis zu Drucken von 20 Atmosphären. Es zeigte sich aber nichts Neues. Die beiden Turbulenzkurven, nämlich die der geraden und gewundenen Kapillare, laufen parallel zueinander. Um ferner bei ganz

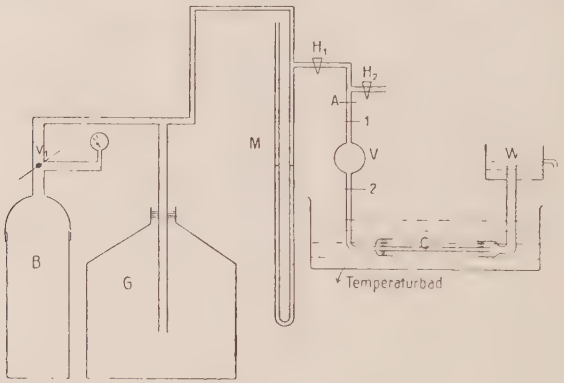


Fig. 8.

niedrigen Drucken arbeiten zu können, gebrauchte ich die in Fig. 8 dargestellte Anordnung.

Mit Hilfe des dichten Glashahnes H_2, der zu einer Wasserstrahlpumpe führte, wurde, während der mit dem Wassermanometer M in Verbindung stehende Hahn H_1 geschlossen blieb, destilliertes Wasser aus dem Behälter W durch die Kapillare C hindurch, etwa bis zur Höhe A, gesaugt. Hierauf wurde H_2 geschlossen und durch Öffnen von H_1 die Verbindung mit dem offenen Wassermanometer M hergestellt; zuvor natürlich mußte dafür gesorgt werden, daß über A wieder der äußere Luftdruck herrschte. Aus der Eisenbombe B strömte Druckluft durch den Glasballon G hindurch in das Manometer und das Durchströmungsgefäß V. Mit Hilfe des Ventils V_1 konnte der Druck während beliebig langer Zeiten exakt konstant erhalten werden. Es wurde dann mit einer Stoppuhr, die noch $^1/_5$ Sekunden genau angab, die Zeit gemessen, welche

das Wasser braucht, um das Volumen zwischen den beiden Marken 1 und 2 (vgl. Fig. 8) zu durchströmen. Letzteres betrug 19,94 ccm. Die Ausflußöffnung lag in einer Höhe, welche der Mitte der beiden Marken entsprach. Das an das etwa 2,5 cm weite Ausflußrohr angesetzte Gefäß *W* war mit Wasser gefüllt, welches ein klein wenig über den Ausflußrand reichte, und hatte den Zweck, die beim Ausströmen in die Atmosphäre auftretenden Oberflächenspannungen zu eliminieren. Durch Öffnen von H_2 wurde die Luft aus dem Manometer wieder entfernt. Ich verwendete bei diesen Messungen Drucke von 2 bis 57 cm H_2O. Nach Reduktion des Volumens auf das in einer Minute durchgeströmte, erhielt ich nachfolgende Druckvolumenkurve. Die der geraden Kapillare entsprechende Kurve habe ich nicht gezeichnet, sondern aus den bekannten Dimensionen berechnet. Als Abszisse ist hier das Volumen pro Minute, als Ordinate wieder der halbe Druck (vgl. Fig. 9).

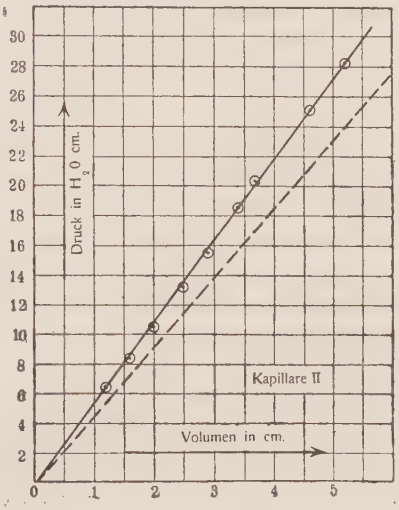


Fig. 9.

Wenn ich nun zur Betrachtung der bedeutenden Abweichungen übergehe, so liegt zunächst die Vermutung nahe, daß sie von einer beim Winden eingetretenen Querschnittsdeformation herrühren könnten. Um hierüber Klarheit zu verschaffen, habe ich die gewundenen Kapillaren an mehreren

Tabelle 3.

Röhre II	Anfang *d* in ccm	Mitte *d* in ccm	Ende *d* in ccm
Richtung I	0,105	0,102	0,104
„ II	0,105	0,102	0,105
„ III	0,108	0,102	0,104

Stellen abgeschnitten und an jeder Stelle in drei um einen Winkel von 120° auseinander liegenden Richtungen den Durchmesser mikroskopisch bestimmt. Für eine Stelle am Anfang, in der Mitte und am Ende seien in vorstehender Tabelle 3 die Resultate angegeben.

Aus diesen Werten sieht man ohne weiteres, daß sie nicht imstande sind, die Abweichungen zu erklären, die schon bei ganz niedrigen Drucken auftreten. Ich habe auch gerade Kapillaren an verschiedenen Stellen in bezug auf die Gleichheit ihres Querschnittes untersucht und die nämlichen Veränderungen des Durchmessers gefunden.[1]) Aus dem Poiseuilleschen Gesetze ergab sich für den Durchmesser in Röhre 2 $d = 0{,}106$ cm.

Betrachten wir die Abweichungen, so fällt vor allem bei sämtlichen Kurven von 1—6 das Fehlen des Knickes auf. Es läßt sich aus dieser Tatsache entschieden der Schluß ziehen, daß kein unstetiger, sondern ein allmählicher Übergang von der Poiseuilleschen Strömung zum Turbulenzzustand stattfindet. Ferner ist beachtenswert, daß die Kurven der geraden und gekrümmten Kapillare bei höheren Drucken parallel werden und zwar liegt die Stelle, an welcher bei den gewundenen Kapillaren der Parallelismus beginnt, bei kleineren Volumina. Es scheinen also diese Versuche dafür zu sprechen, daß durch Windungen der Eintritt der Turbulenzströmung beschleunigt wird. Genaueren Aufschluß darüber bringen nun die folgenden Versuche.

Dritter Abschnitt.

Hauptversuche.

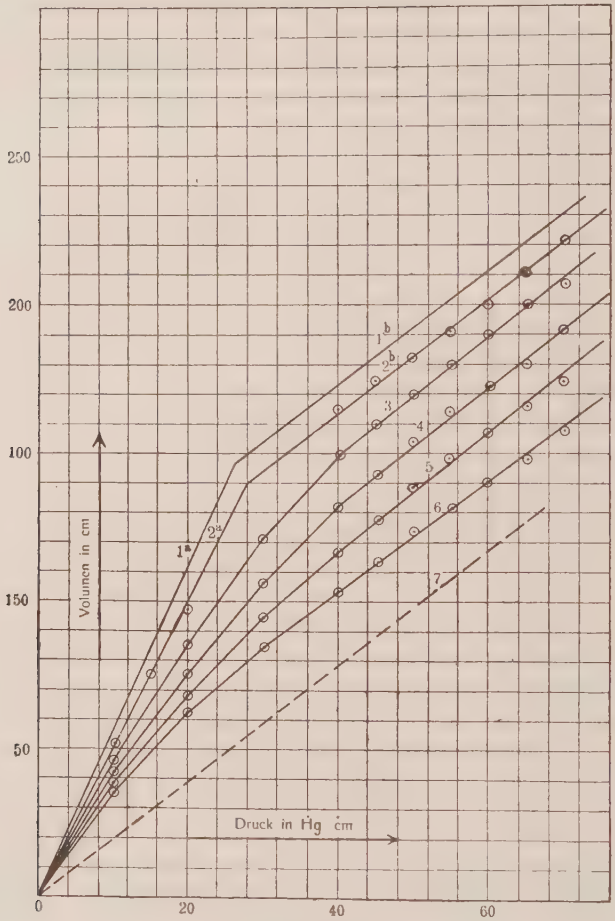
Nachdem die Vorversuche wichtige Aufschlüsse über den Eintritt der Turbulenzströmung (insbesondere der Abhängigkeit vom Kapillarenradius) geliefert hatten, habe ich in den folgenden Messungen in erster Linie den Einfluß der Windungszahl geprüft. Zu diesem Zwecke habe ich ein und dieselbe Röhre zuerst mit einer Windung versehen lassen und die Beobachtungen angestellt, dann habe ich bei 2, 4, 6, 8 Win-

1) Vgl. Grätz, Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik 25. p. 316. 1879.

dungen die Messungen ausgeführt. Mehr als acht Windungen konnte ich nicht nehmen, da bei dem gewählten Krümmungshalbmesser die Länge der Röhre zu weiteren Windungen nicht ausreichte. Die erhaltenen Druckvolumenkurven sind in der Tafel 7 (vgl. S. 26) dargestellt und zwar der halbe Druck als Abszisse, das in einer Minute ausgeströmte Volumen als Ordinate. Die der geraden Kapillare entsprechende Kurve wurde nicht beobachtet, sondern aus bekannten Dimensionen der Röhre berechnet. Der aus dem vorausgehenden Abschnitt gefundene Parallelismus dieser Turbulenzkurven ergab die Richtung von 1b. Die Länge der Kapillare betrug $l = 157{,}6$ cm, der Kapillarendurchmesser $2\varrho = 0{,}125$ cm, der Krümmungshalbmesser $2r = 4{,}5$ cm.

Vergleichen wir die Kurven 2—6, so fällt vor allem wieder der Parallelismus der Turbulenzzweige auf. Ferner sind die Abstände, d. h. die Abweichungen der Volumina bei ein und demselben Drucke sehr nahe einander gleich, namentlich die der parallelen Äste, so daß man also eine direkte Proportionalität zwischen Windungszahl und Abweichung annehmen darf, sicherlich, wenn es sich um so wenige Windungen handelt, wie in den gezeichneten Kurven. Ich möchte hier gleich erwähnen, daß die einzelnen Windungen nicht ganz gleichmäßig waren und Unterschiede in den Durchmessern der Windungen bis zu 5 mm vorkommen. Ferner waren die einzelnen Krümmungen nicht exakt kreisförmig. Auf diese Tatsache glaube ich zurückführen zu dürfen, daß die Proportionalität nicht vollständig genau erhalten wurde. Doch scheint sich dieser Einfluß bei den der Kurve 1a entsprechenden Teilen mehr geltend zu machen, als bei denen, die zu 1b gehören. Das Fehlen des Knickes bei den Kurven 3, 4, 5, 6 entspricht wieder einem allmählichen Übergang zur Turbulenzströmung, wie bei den Kapillaren 1—6 im vorigen Abschnitt. Dagegen tritt in der Kurve 1, die einer Windung entspricht, der Knick noch sehr deutlich auf. Der untere Teil 2a besitzt also, wenn wir hier die Reynoldsschen Untersuchungen im Prinzip noch als gültig annehmen, eine wirbelfreie Strömung, während dagegen im oberen Teile 2b Wirbel auftreten. Beide Strömungsgebiete sind also hier noch scharf getrennt im Gegensatz zu den Kurven 2—6. Der Knick selbst liegt bei einem etwas

kleineren Volumen, d. h. bei einer kleineren mittleren Geschwindigkeit. Die Verschiebung ist ganz gering und beträgt 5 ccm. Bei den weiteren Kurven läßt sich leider eine Ver-



Taf. VII.

schiebung nicht mehr konstatieren, so daß über die Abhängigkeit der Verschiebung von der Windungszahl nichts auszusagen ist. Es macht sich daher der Einfluß der Windungen vor allem darin geltend, daß eine Verschiebung der kritischen Geschwindigkeit zu kleineren Werten eintritt oder mit anderen Worten, daß der Eintritt der Turbulenzströmung beschleunigt

wird. Ich möchte hier ausdrücklich betonen, daß bisher die kritische Geschwindigkeit stets in Reynolds Sinne aufzufassen ist, nämlich als derjenigen Grenzgeschwindigkeit, oberhalb welcher in der ganzen Röhre wirbelförmige Bewegungen eintreten, unterhalb welcher aber der Poiseuillesche Strömungszustand vorhanden ist. Wenn wir diese Auffassung der kritischen Geschwindigkeit auch auf gewundene Röhren übertragen wollen, bei denen kein unstetiger Übergang der beiden Bewegungserscheinungen stattfindet, so können wir dies, wenn wir die Reynoldssche Definition im engeren Sinne auffassen. Wir verstehen dann bei gewundenen Kapillaren unter kritischer Geschwindigkeit diejenige, oberhalb welcher in der ganzen Röhre turbulente Erscheinungen zutage treten, unterhalb der aber ein allmählicher Übergang zwischen Poiseuillescher Strömung und Turbulenz stattfindet. Eine strenge Trennung der beiden Strömungsgebiete läßt sich also nicht mehr aufrecht erhalten, was auch schon daraus folgt, daß die Neigung der dem Poiseuilleschen Gesetze entsprechenden Kurve immer kleiner wird, also einmal in die konstante Neigung des Turbulenzzweiges übergehen muß. Diesen Grenzfall habe ich

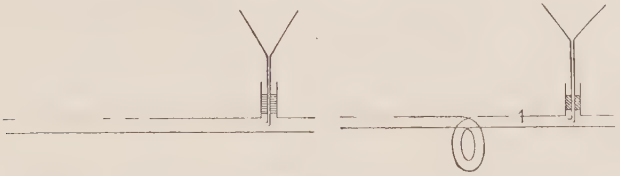


Fig. 10.

durch die gestrichelte Kurve 7 (vgl. Taf. VII) dargestellt. Bei ihm treten sofort, also schon bei den niedrigsten Drucken Wirbel auf.

An dieser Stelle möchte ich einige Versuche beschreiben, die sich auf die Einführung von farbigen Flüssigkeiten in das Innere der durchströmten Kapillare beziehen, denn man kann an ihnen die Bewegung der Flüssigkeit sehr schön beobachten

In eine gerade Röhre mit einem seitlichen Ansatzrohr wurde ein weites in eine sehr feine Spitze auslaufendes Glasrohr mittels eines Korkes eingesetzt (vgl. Fig. 10).

Dieses wurde mit einer Lösung von Kaliumpermanganat-

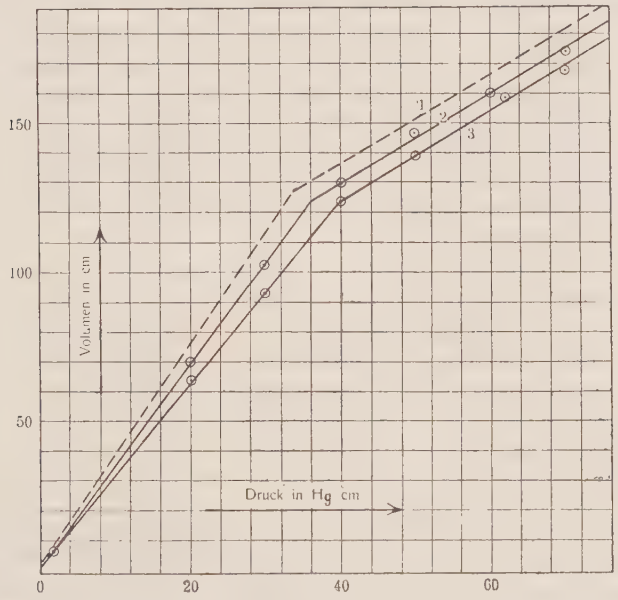
lösung gefüllt und das Durchströmungsrohr am einfachsten mit der Wasserleitung verbunden. Aus der feinen Spitze floß nun ein sehr dünner Faden in der Mitte der Röhre parallel zur Achse. Erhöhte man den Druck, so wurde der Faden immer breiter und endlich nach Überschreiten des kritischen Druckes erfüllte die farbige Flüssigkeit die ganze Röhre, ein Zeichen dafür, daß bereits Wirbel aufgetreten sind. Den Moment des Übergangs vom parallelen Stromverlauf zur Turbulenzbewegung konnte man genau fixieren. Die gleichen Versuche wiederholte ich mit einer Kapillare von vier Windungen. Ich konnte dabei folgende drei Fälle unterscheiden:

1. Es ließ sich durch Geschwindigkeitserniedrigung erreichen, daß der farbige schmale Faden in dem geraden Teile 1 (vgl. Fig. 10) und der ersten Windung vollständig gleichmäßig vorhanden war, während in der zweiten Windung eine Erweiterung eintrat, die in der dritten zunahm und in der vierten Windung fast schon das ganze Rohr erfüllte. Bei noch mehr Windungen würde dann vollständige Turbulenz eingetreten sein.

2. Bei weiterer Geschwindigkeitserniedrigung konnte der farbige schmale Faden in dem geraden Teile und in zwei Windungen exakt in der Mitte der Röhre erhalten werden, so daß also in diesen Teilen noch wirbelfreie Strömung herrschte, während in Windung 3 und 4 allmähliche Verbreiterungen auftreten.

3. Schließlich gelang es mir noch, durch fortgesetzte Verminderung in drei und schließlich in vier Windungen vollkommene Wirbelfreiheit zu erreichen, was sich daran erkennen ließ, daß der farbige Stromfaden sich in der Mitte der Röhre durch alle Windungen zog, ohne breiter zu werden. Man sieht also aus diesen Versuchen die aus den Messungen sich ergebenden Resultate bestätigt, ja sie gewähren in mancher Beziehung noch näheren Aufschluß. Es ergibt sich nämlich gerade aus diesen Versuchen, daß bei jeder Windungszahl, die unterhalb der dem Grenzfall entsprechenden liegt, die wir kritische Windungszahl nennen wollen, ein völlig wirbelfreies Strömungsgebiet existiert. Mit wachsender Windungszahl nimmt dieses Gebiet ab und verschwindet für den Grenzfall ganz, Dieses wirbelfreie Gebiet ist durch eine Grenzgeschwindigkeit

charakterisiert. Beim Überschreiten derselben tritt nicht plötzliche Wirbelbildung auf, sondern es entstehen zunächst in den dem Ausflußende nahe gelegenen Windungen Wirbel, die sich mit Erhöhung der Geschwindigkeit immer weiter in das Röhreninnere hineinziehen und so einen allmählichen Übergang herstellen. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit herrschen



Taf. VIII.

dann in der ganzen Röhre Wirbel. Und diese ist es, die wir mit der Reynoldsschen kritischen Geschwindigkeit identifizieren können und die sich nach den oben gemachten Versuchen zu kleineren Werten verschiebt. Da, wie aus den Kurventafeln (vgl. Taf. 7) zu ersehen ist, bei mehr als einer Windung kein Knick mehr auftritt, so habe ich es noch mit einer halben Windung von folgender Form ⌒ versucht. In Taf. VIII sind die Ergebnisse zusammengestellt. Die Kurve 2 entspricht einer halben Windung, Kurve 3 einer ganzen. Die Länge der Röhre betrug $l = 146{,}6$ cm, der Krümmungshalbmesser $2\varrho = 5$ cm. Da mir am Schluß der Versuche die Röhre zersprang, so konnte ich den Radius nicht mehr bestimmen. Die

gestrichelte Kurve 1 soll den Verlauf der geraden Kapillare auf Grund der in den letzten Seiten erhaltenen Resultate ungefähr andeuten. Man sieht auch hier bei Kurve 2 und 3 die allerdings kleine Verschiebung der kritischen Geschwindigkeit zu kleineren Werten.

Die bisherigen Versuche waren insgesamt mit Kapillaren von sehr kleinem Durchmesser durchgeführt. Im Folgenden habe ich Versuche bei sehr großem Durchmesser unter Anwendung einer dazu geeigneten Anordnung vorgenommen. Bei diesen Versuchen verwendete ich Leitungswasser. Die Anordnung selbst sei im folgenden kurz skizziert.

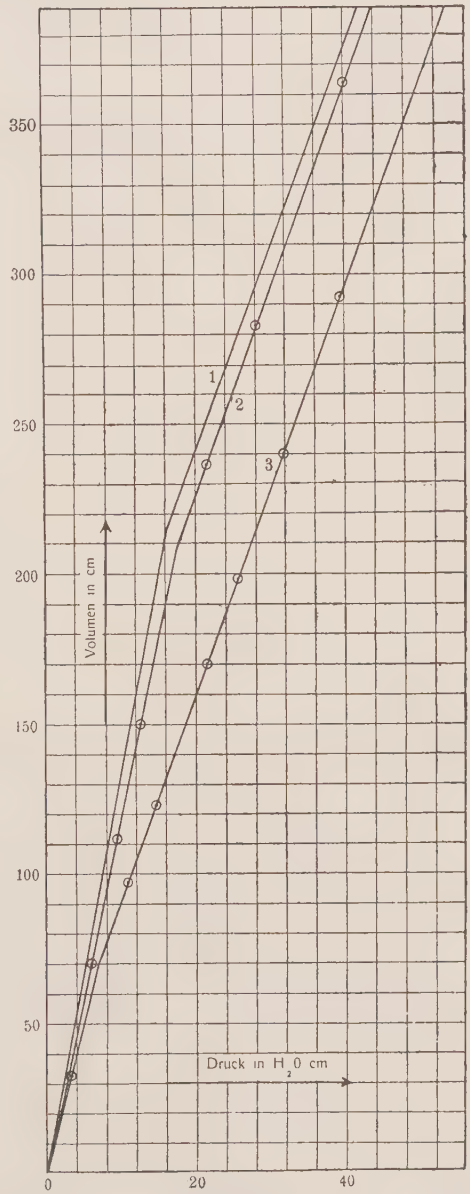
Die Rohrleitung L war mit einer Wasserleitung in Verbindung gebracht. Der Hahn H_1 sowie das verschiebbare

Fig. 11.

Rohr R dienten zum Regulieren und konstant Halten des Druckes. Die Kapillare K war mit Siegellack an das Manometer M gekittet. Der drehbare Hahn S ist ähnlich wie der Schnapphahn in den Hauptversuchen eingerichtet. Von ihm führen zwei Leitungen zu den Ausflußgefäßen A_1 und A_2 Durch Drehen von S konnte abwechselnd Wasser aus A_1 oder A_2 ausfließen. Die Zeit während des Ausströmens wurde mit einer Stoppuhr gemessen. Die erhaltenen Beobachtungsresultate sind in Taf. IX angegeben. Man ersieht hieraus zunächst wieder die Proportionalität der Abweichungen. Kurve 1 ist die gerade Kapillare, aus ihren Dimensionen $l = 155{,}8$ cm $d = 0{,}370$ cm gezeichnet, Kurve 2 bei einer Windung (Krümmungshalbmesser $2\varrho = 5$ cm) und Kurve 3 bei vier Windungen Ferner ergibt sich hier deutlich die Verschiebung. Bei vier Windungen ist der Knick noch sehr gut erhalten. Es ist daher aus diesen Ergebnissen der Schluß zu ziehen, daß die Verschiebung der kritischen Geschwindigkeit zu kleineren

Werten um so größer ist, je größer man den Radius der Kapillare wählt. Dieses Resultat ist auch dadurch gestützt, daß Kapillaren von großen Radien den Eintritt der Turbulenzbewegung mehr begünstigen als enge, da bei ersteren die kritische Geschwindigkeit sehr klein ist. Eine Krümmung wird deshalb bei ihnen zur Turbulenz mehr beitragen als bei engen.

Was die Abweichungen selbst betrifft, so ist zu ihrer Erklärung anzunehmen, daß bei gekrümmten Kapillaren nicht mehr der ganze Druck zur Überwindung der Reibungskräfte verwendet wird, sondern nur ein Teil desselben. Der andere Teil dagegen wird zur Überwindung der infolge der Krümmung auftretenden Zentrifugalkräfte verbraucht. Diese Annahme deckt sich auch mit den Messungsresultaten, daß nämlich zu ein und demselben Drucke im Falle einer Krümmung ein kleineres Volumen gehört.



Taf. IX.

Vierter Abschnitt.

Da die kritische Geschwindigkeit auch von der Dichte der durch die Kapillare strömenden Flüssigkeit abhängt, so war es von Interesse, Versuche mit Flüssigkeiten durchzuführen, deren Dichte von der des Wassers wesentlich verschieden ist.

Zu diesem Zwecke nahm ich Quecksilber. Da die früheren Anordnungen für Quecksilber sich wenig eigneten, verwandte ich hierfür folgende in Fig. 12 dargestellte Anordnung.

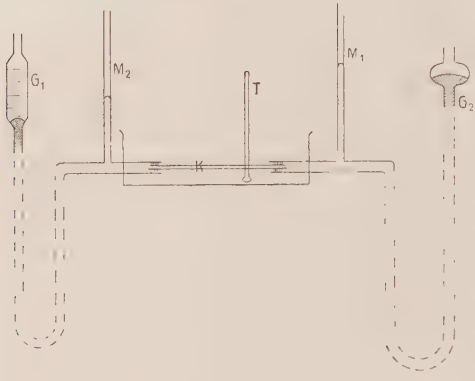
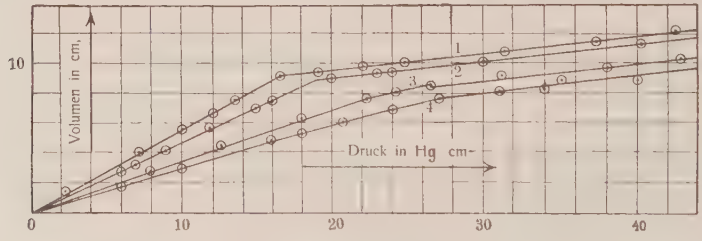


Fig. 12.

K war die Kapillare, M_1 und M_2 zwei Manometerrohre. Das Glasgefäß G_1 war kalibriert und konnte ebenso wie G_2 gehoben und gesenkt werden. Bei den Versuchen wurde die Zeit mit einer Stoppuhr gemessen, die das Quecksilber brauchte, um ein bestimmtes Volumen zwischen zwei Teilstrichen in G_1 zu durchströmen. Der zugehörige Druck war die Differenz zwischen den Manometern M_1 und M_2. Um in M_1 den Druck, der mit Hilfe von G_2 eingestellt war, möglichst



Taf. X.

Durchmesser: 0,0918 cm Länge: 157,0 cm Krümmungsdurchmesser: 4,5 cm.

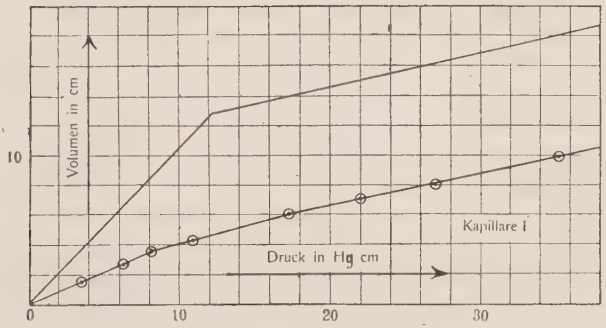
konstant zu erhalten, nahm ich den Durchmesser von G sehr groß. Ich brauchte daher nur den Enddruck in G_1 zu be-

obachten. *T* war ein Thermometer zur Bestimmung der Temperatur des durchströmenden Quecksilbers.

Die Resultate sind in den Tafeln X—XIV wiedergegeben. Betrachten wir zunächst Tafel X, so finden wir die früheren Resultate bestätigt.

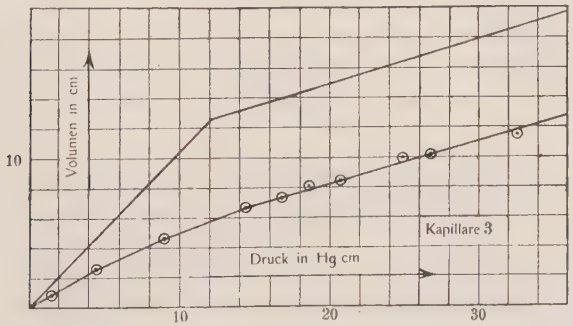
Kurve 1 entspricht der geraden Röhre,
„ 2 „ zwei Windungen,
„ 3 „ sechs „
„ 5 „ acht „

Wir haben wieder die lineare Proportionalität zwischen Abweichung und Windungszahl. Bei Kurve 2 ist der Knick noch vorhanden, während bei den anderen ein allmählicher



Taf. XI.

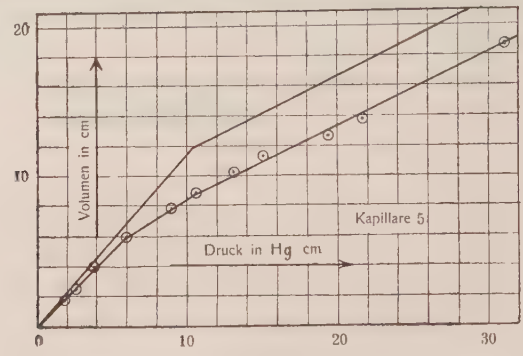
Durchmesser: 0,103 cm, Länge: 157,5 cm, Krümmungsdurchmesser: 2,5 cm, Windungszahl 14.



Taf. XII.

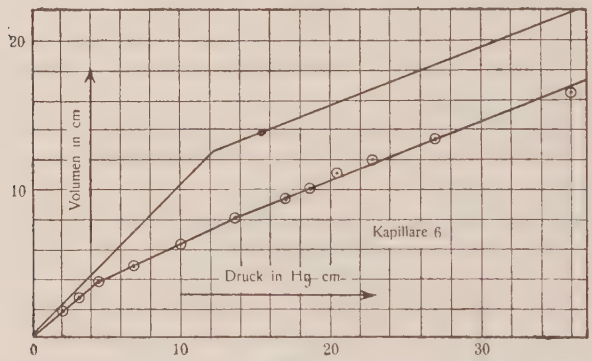
Durchmesser: 0,111 cm, Länge: 157,6 cm, Krümmungsdurchmesser: 2,6 cm, Windungszahl: 14.

Übergang stattfindet. Die kritische Geschwindigkeit ist auch hier zu kleineren Werten verschoben. Die Tafeln XI—XIV stellen die in den Vorversuchen benutzten Kapillaren dar. Bei



Taf. XIII.

Durchmesser: 0,116 cm, Länge: 157,7 cm, Krümmungsdurchmesser: 7,5 cm, Windungszahl: 5.



Taf. XIV.

Durchmesser: 0,111 cm, Länge: 157,4 cm, Krümmungsdurchmesser: 7,5 cm, Windungszahl: 5.

diesen sind die der geraden Kapillare entsprechenden Kurven nicht beobachtet, sondern aus bekannten Dimensionen gezeichnet worden. Vergleichen wir die Abweichungen in gleichen Druckintervallen für Wasser und Quecksilber, so sehen wir, daß sie für Wasser geringer sind, eine Tatsache, auf die bereits Grüneisen[1]) hinweist.

1) E. Grüneisen, Wissenschaftliche Abhandlungen der Phys. Techn. Reichsanstalt 4, Heft 2.

Fünfter Abschnitt.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Versuche haben demnach ergeben, daß bei gewundenen Röhren der Einfluß der Zentrifugalkraft die Turbulenz vergrößert und zwar nimmt sie mit der Anzahl der Windungen zu. Das Reynoldssche Kriterium für die kritische Geschwindigkeit gilt im allgemeinen nicht mehr. Die kritische Geschwindigkeit wird zu kleineren Werten verschoben und zwar ist die Verschiebung um so größer, je größer der Kapillarenradius ist. Von einer verhältnismäßig sehr kleinen Windungszahl an existiert überhaupt ein strenger Übergang zur Turbulenzbewegung nicht mehr, sondern es findet ein allmähliches Übergehen statt. Die Beobachtungen mit farbigen Flüssigkeiten zeigen, daß die Turbulenz von den letzten Windungen mit zunehmender Geschwindigkeit nach vorne schreitet. Es ist also die Turbulenz auf der ganzen Röhrenlänge keine gleichmäßige, sondern sie nimmt mit Vorrücken der Flüssigkeit zu.

Während bei einer geraden Reihe mit glatten Wänden zu einer bestimmten Geschwindigkeit immer eine bestimmte Turbulenz gehört, die durch den Widerstand, den die Röhre dem Durchgang der Flüssigkeit bietet, gemessen wird, ist dieser Widerstand bei gewundenen Röhren größer. Ist Q die in der Sekunde durchgeflossene Flüssigkeitsmenge, P der Druck, so ist

$$Q = \frac{P}{W},$$

wo der Widerstand W zunächst nur so lange konstant ist, als das Poiseuillesche Gesetz gilt. Bei Steigerung der Geschwindigkeit wird man wieder zu einem konstanten, aber größeren Widerstand geführt, wenn man

$$Q - Q_0 = \frac{P}{W}$$

setzt. Hier nimmt Q_0 mit der Windungszahl ab, während $W = d\,Q/d\,P$, sowohl von der Windungsanzahl wie von der Geschwindigkeit unabhängig ist. Schließlich wird $Q_0 = 0$, und dann haben wir wieder wie beim Poiseuilleschen Gesetz:

$$Q = \frac{P}{W}.$$

Diese Gerade scheint eine Grenzlinie zu sein, unter welche die Volumendruckkurve nicht zu gehen scheint.

Lebenslauf.

Am 18. Oktober 1887 wurde ich, Gottfried Lechner, kath. Konfession zu Straubing (bayr. Regierungsbezirk Niederbayern) als Sohn des jetzigen Kgl. Landgerichtsdirektors Franz Lechner in Regensburg und seiner Ehefrau Elise Lechner, geb. Schmidmayer, geboren. Ich besuchte zu Regensburg die Volksschule und die unteren Klassen des Gymnasiums, absolvierte 1907 das Gymnasium zu Bamberg und bezog dann im Herbst 1907 die Universität München, um mich dem Studium der Mathematik und Physik zu widmen.

In München waren meine Lehrer die Herren Döhlemann, Grätz, Hartogs, Koch, Lindemann, Perron, v. Riezler, Röntgen, Sommerfeld, Voss, Wagner.

Im Sommersemester 1910 immatrikulierte ich mich an der Universität Würzburg, an welcher ich beiliegende Arbeit unter Leitung von Herrn Geh. Hofrat W. Wien anfertigte. In Würzburg war ich bis zum Sommersemester 1912 immatrikuliert.

Meine Lehrer in Würzburg waren die Herren Buchner, Cantor Harms, Hilb, Rost, Wien.